METEO FRANCE

CONCOURS EXTERNE SPÉCIAL POUR LE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DES TRAVAUX DE LA MÉTÉOROLOGIE ET D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DE L'ÉCOLE NATIONALE DE LA MÉTÉOROLOGIE

SESSION 2017

****

ÉPREUVE ÉCRITE OBLIGATOIRE

MÉTÉOROLOGIE

Durée : 4 heures — Coefficient : 6

La rigueur, le soin et la clarté apportés à la rédaction seront pris en compte dans la notation.
L'utilisation d'une calculatrice de poche, standard, programmable, alphanumérique ou à écran graphique est autorisée à condition que son fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante ni de dispositif externe de stockage (cartes, clé usb, etc) **L'utilisation de toute documentation sur support papier ou électronique est strictement interdite.**

Documents fournis avec les copies : deux émagrammes.

Cette épreuve aborde trois domaines différents :

→ Domaine A : COUCHE LIMITE (7 points)
→ Domaine B : METEOROLOGIE GENERALE (6 points)
→ Domaine C : METEOROLOGIE DYNAMIQUE (7 points)

IMPORTANT : CHACUN DES DOMAINES A, B ET C DOIT ETRE REDIGE SUR UNE COPIE SEPAREE.

Pour tout document annexe rendu avec la copie, le candidat portera sur celui-ci le nom du centre d'examen où il passe l'épreuve, le numéro de place occupée et le domaine concerné, à l'exclusion de toute autre information. En haut et à gauche de chacune des copies doubles et des documents annexes, le candidat devra porter un numéro d'ordre (1/N, 2/N, N/N, N correspondant au nombre total de documents rendus.)

Ce sujet comporte 10 pages (page de garde incluse)

Météo-France, établissement public administratif,
Direction des ressources humaines,73, avenue de Paris 94165 Saint-Mandé Cedex

Domaine A : COUCHE LIMITE

Exercice 1

Dans la couche limite atmosphérique, l'équation du mouvement dans le système de Boussinesq, utilisant la notation sommatoire d'Einstein(*), peut s'écrire de la façon suivante pour chacune des composantes *i* :

$$\frac{du_i}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\beta(\theta-\theta_0)\delta_{3i}-2\epsilon_{i\alpha\beta}\Omega_\alpha u_\beta+\nu\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \quad (1)$$

De plus le système de Boussinesq est non divergent :

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \quad (2)$$

(*) *la convention sommatoire d'Einstein stipule qu'un « monôme » formé avec des composantes de vecteurs dans lequel des indices grecs figurent deux fois est à interpréter comme la somme des monômes obtenus en donnant à ces indices, indépendamment les valeurs 1, 2 et 3 (exemple : $a_\alpha b_\alpha=a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3$).*

Variable	Définition	Variable	Définition
u_i	La i-ème composante du vent	Ω	Vitesse de rotation de la terre
ρ	Densité de l'air	f	Paramètre de Coriolis : $f=2\times\Omega\times\sin\varphi$
p	Pression atmosphérique	ν	Coefficient de diffusion moléculaire
β	Coefficient de flottabilité	u_g	Composante zonale du vent géostrophique
θ	Température potentielle	v_g	Composante méridienne du vent géostrophique
θ_0	Température potentielle de référence	δ_{ij}	Composante ij du tenseur de Kronecker $\delta_{ij}=0$ si $i\neq j$
ϵ_{ijk}	Composante ijk du tenseur alternatif $\epsilon_{ijk}=0$ si 2 indices sont égaux, $\epsilon_{ijk}=1$ si $ijk=123,\ 231\ ou\ 312$ $\epsilon_{ijk}=-1$ si $ijk=132,\ 213\ ou\ 321$		

1) Quelle est la signification de chacun des termes de l'équation (1) ?

2) Quelles sont les unités de β et ν ?

3) En décomposant chaque variable d'état X en $X=\overline{X}+X'$, $\overline{X}$ étant la valeur moyenne et X' l'écart à cette moyenne , exprimer $\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$, $\frac{\partial \overline{v}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}$ en utilisant les axiomes de Reynolds que l'on rappellera (la notation sommatoire d'Einstein sera privilégiée).

4) Dans la couche limite planétaire homogène horizontalement $\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}=0$ pour tous les champs moyens sauf la pression, montrer alors que $\bar{w}=0$ et que les composantes de l'accélération horizontale du vent moyen peuvent s'écrire (le vent géostrophique sera considéré stationnaire) :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}=f(\bar{v}-v_g)-\frac{\partial F_{\bar{u}}}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}=-f(\bar{u}-u_g)-\frac{\partial F_{\bar{v}}}{\partial z} \quad (3)$$

5) Que représentent physiquement les termes $-\frac{\partial F_{\bar{u}}}{\partial z}$ et $-\frac{\partial F_{\bar{v}}}{\partial z}$?

6) Pourquoi le système (3) n'est-il pas fermé ? Proposer une fermeture du premier ordre pour ce système.

7) Passer dans l'espace complexe et montrer que le système (3) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}=-if\bar{V}+K\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} \quad (4),$$

K étant un coefficient constant.

8) Intégrer (4) dans le cas stationnaire et exprimer $\bar{u}(z)$ et $\bar{v}(z)$ en fonction de u_g , v_g , z et $\lambda=\sqrt{\frac{f}{2K}}$.

9) De nuit on suppose qu'on peut négliger le terme $K\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2}$ dans l'équation (4). Comment justifier cette hypothèse ? Déterminer l'évolution temporelle du vent. Quelle est la trajectoire décrite par les particules d'air ?

Exercice 2

On considère un couvert végétal de hauteur 1 m ayant une hauteur de déplacement z_d . Dans le cas neutre, le profil de vent dans la couche de limite de surface (CLS) est logarithmique.

1) Exprimer le vent près de la surface en fonction de z , z_d , u_* et d'une longueur de rugosité z_0 .

2) Connaissant les vitesses du vent u_1 et u_2 aux altitudes z_1 et z_2 dans la CLS, exprimer u_* et z_0 .

3) Application numérique : calculer u_* et z_0 pour $z_1=2m$, $z_2=20m$, $u_1=3ms^{-1}$ et $u_2=6ms^{-1}$ pour $z_d=65cm$. Comparer aux valeurs obtenues si on ne tient pas compte de la hauteur de déplacement. On prendra $\kappa=0.4$ comme constante de Karman.

Domaine B : METEOROLOGIE GENERALE

Données : Constante universelle des Gaz Parfaits : $R^* = 8{,}314$ J mole^{-1} K^{-1}
Masse molaire de l'air sec : M = 29 g

Constante de la loi de Wien : 2898 10^{-6} m K

Constante de la loi de Stefan-Boltzmann : 5,67 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}

Si on note c_p la chaleur massique à pression constante, c_v la chaleur massique à volume constant, alors pour un Gaz Parfait diatomique

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$$

Première question : circulation générale de l'atmosphère

a) Représenter une coupe verticale (entre le sol et 20 km environ), avec la latitude en abscisse (du pôle sud au pôle nord) et l'altitude en ordonnée, sur laquelle figurera l'allure en moyenne annuelle des isentropes (c'est-à-dire des lignes d'égale température potentielle). Représenter ensuite sur le même schéma l'allure en moyenne annuelle des isotaches (lignes d'égale vitesse) du vent normal au plan de coupe.

b) Quelle relation relie le gradient méridien de température potentielle et le cisaillement vertical du vent zonal ? Comment obtient-on cette relation ?

c) Faire apparaître sur le schéma du a), les régions barotropes et les régions baroclines. Expliquer pourquoi on peut dire que la baroclinie est un « carburant » qui peut être extrait et converti en énergie cinétique.

Deuxième question : rayonnement

a) On admet d'une part que la distance de la terre au soleil est constante au cours du temps et égale à 150 10^6 km, et que d'autre part le soleil rayonne comme un corps noir. La constante solaire vaut 1370 W m^{-2}.

Calculer la température de surface du soleil, sachant que son rayon est de 690 10^3 km.

b) Pour quelle longueur d'onde se fait le maximum d'émission pour le soleil ? Justifier votre réponse.

Troisième question : thermodynamique atmosphérique

L'exercice sera effectué graphiquement sur émagramme.

On considère une particule d'air atmosphérique à la pression P_0 = 1000 hPa et à la température T_0 = 15°C, ayant une température du point de rosée T_{d0} = 5°C.

a) Déterminer son humidité relative U_0.

b) Cette particule subit une détente adiabatique jusqu'à 900 hPa. Déterminer sa nouvelle humidité relative U_1.

c) Elle subit ensuite un réchauffement isobare jusqu'à +15°C. Déterminer sa nouvelle humidité relative U_2.

d) Enfin, on lui fait subir une compression isotherme jusqu'à 1000 hPa. Déterminer la nouvelle humidité relative U_3.

Quatrième question : exercices sur le premier principe de la thermodynamique

Exercice 1

Une masse de 1 kg d'air sec, assimilé à un gaz parfait diatomique, subit une compression adiabatique qui fait passer sa température de $T_i = 293$ K à $T_f = 333$ K. Trouver l'expression du travail reçu par le gaz et faire l'application numérique.

Exercice 2

On considère un réservoir aux parois indéformables et adiabatiques, séparé en deux compartiments de même volume par une paroi fixe et indéformable.

Chaque compartiment contient du dioxygène (assimilé à un gaz parfait), la pression dans chacun des compartiments vaut respectivement $P_1 = 10^5$ Pa et $P_2 = 2\ 10^5$ Pa ; la température est la même dans les deux compartiments.

On met en communication les deux compartiments (trou dans la paroi de séparation) et on attend l'équilibre. Calculer la variation d'énergie interne de l'ensemble, ainsi que la pression finale une fois l'équilibre atteint.

Exercice 3

On considère deux moles de dioxygène (assimilé à un gaz parfait) que l'on fait passer réversiblement de

$$Etat\ A\begin{pmatrix} P_A \\ V_A \\ T_A = 300\,K \end{pmatrix} \rightarrow Etat\ B\begin{pmatrix} P_B = 3\,P_A \\ V_B \\ T_B = T_A \end{pmatrix}$$ par deux transformations distinctes :

✓ une transformation isotherme

✓ une transformation isochore (c'est-à-dire à volume constant) suivie d'une transformation isobare.

a) Représenter ces deux transformations sur un diagramme de Clapeyron (V, P)

b) Calculer le travail et la chaleur reçus par les deux moles d'O_2 pour chacune de ces transformations.

Domaine C: METEOROLOGIE DYNAMIQUE

Quasi-équilibre horizontal à grande échelle

Dans le référentiel géocentrique, la loi de Newton appliquée à une particule de fluide atmosphérique, de masse volumique ρ de masse *M* et de volume *dV*, s'écrit :

$$\frac{D_a(M\vec{u}_a)}{Dt} = \vec{F}_p + \vec{F}_g + \vec{F}_\mu$$

Notations :

$\frac{D_a}{Dt}$: évolution lagrangienne dans le référentiel géocentrique

$\frac{D}{Dt}$: évolution lagrangienne dans le référentiel relatif (repère local)

$\vec{u}_a$: vitesse dans le référentiel géocentrique

$\vec{u}_e$: vitesse d'entrainement

$\vec{u}$: vitesse dans le référentiel relatif

$\vec{F}_g$: force d'attraction terrestre

$\vec{F}_p$: force de pression

$\vec{F}_\mu$: force de viscosité

$\vec{\Omega}$: vecteur rotation de la Terre

1. Donner l'expression de la force d'attraction terrestre $\overrightarrow{F_g}$ en fonction de M, M_t la masse de la Terre, G la constante gravitationnelle, r la distance au centre de la Terre, et $\overrightarrow{e_r}$ un vecteur unitaire dirigé du centre de la Terre vers la particule.

2. On note $\overrightarrow{g}^*$ le champ d'attraction terrestre. Donner l'expression de $\overrightarrow{g}^*$?

3. En effectuant le bilan des forces de pression s'exerçant sur un petit volume parallélépipédique $dV = dxdydz$ centré au point M de coordonnées (x_0, y_0, z_0), établir l'expression de la force surfacique de pression $\overrightarrow{F_p}$.

4. A l'aide d'un raisonnement analogue, établir l'expression de la force surfacique de viscosité $\overrightarrow{F_\mu}$. On notera μ la viscosité dynamique du fluide atmosphérique.

5. Montrer que l'accélération absolue, dans un référentiel galiléen, est égale à l'accélération relative dans le référentiel terrestre, à laquelle se rajoutent deux termes d'accélérations d'inertie :

$$\frac{D_a\vec{u}_a}{Dt}=\frac{D\vec{u}}{Dt}+2\vec{\Omega}\wedge\vec{u}+\vec{\Omega}\wedge\vec{u}_e$$

6. Exprimer le poids $\vec{g}$ en fonction de $\vec{g}^*$ et de la force d'inertie centrifuge que vous préciserez.

7. En déduire l'équation vectorielle du mouvement dans le repère local lié à la Terre.

Quasi-équilibre horizontal à grande échelle

On rappelle l'équation vectorielle du mouvement horizontal <u>en dehors de la couche limite atmosphérique</u> :

$$\frac{D\vec{V}_h}{Dt}=-f\vec{k}\wedge\vec{V}_h-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}_h P$$

$\vec{V}_h$: vitesse horizontale, f : paramètre de Coriolis, $\vec{k}$: vecteur unitaire vertical
ρ : masse volumique, P : pression atmosphérique

1. Expliciter chaque terme de l'équation.

2. On se place à grande échelle sur un *f*-plan aux moyennes latitudes $\left(f = f_0 = 10^{-4}\, s^{-1}\right)$. On s'intéresse aux écarts des variables par rapport à une atmosphère de référence au repos, barotrope, hydrostatique : $\alpha = \bar{\alpha}(z) + \tilde{\alpha}(x,y,z,t)$. Montrer que l'analyse en ordre de grandeur de l'équation du mouvement implique nécessairement que la perturbation de pression horizontale $\tilde{P}$ vaut $10\, hPa$. Quel quasi-équilibre obtient-on à grande échelle sur l'horizontale ?

On prendra les ordres de grandeurs suivants :

Paramètre de Coriolis : $f_0 = 10^{-4}\, s^{-1}$
Echelle verticale : $H = 10^4\, m$
Echelle horizontale : $L = 10^6\, m$
Echelle de vitesse horizontale : $U = 10\, m\, s^{-1}$
Echelle de temps : $T = L/U = 10^5\, s$
Masse volumique : $\bar{\rho} = 1\, kg\, m^{-3}$
Ecart de masse volumique : $\tilde{\rho} = 10^{-2}\, kg\, m^{-3}$

3. Comment se nomme le vent $\vec{V}_g$ qui répond à cette situation de quasi-équilibre ? Donner son expression vectorielle en fonction du gradient horizontal de pression $\vec{\nabla}_h(P)$ ainsi qu'en fonction du gradient isobare de géopotentiel $\vec{\nabla}_P(\phi)$. Expliciter également les composantes zonale et méridienne de ce vent.

4. Quantifier la validité de l'approximation démontrée précédemment aux moyennes latitudes en faisant intervenir le nombre de Rossby R_0.

5. Démontrer que la partie agéostrophique du vent $\vec{V}_a$ est directement liée à l'accélération horizontale $\dfrac{D\vec{V}_h}{Dt}$.

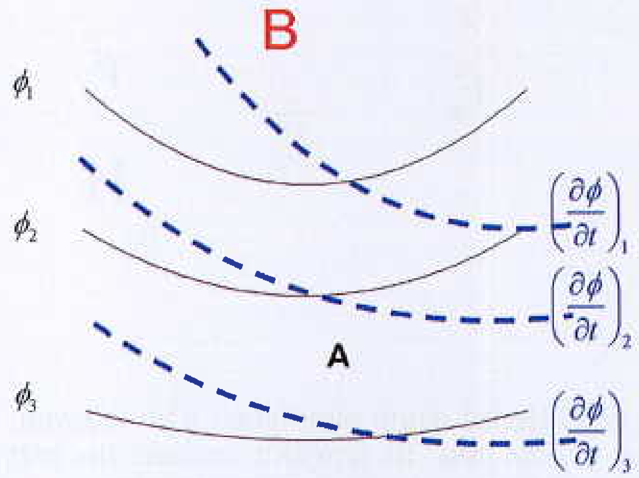
6. On se place dans le cadre de l'approximation quasi-géostrophique : l'accélération du vent horizontal est assimilée à l'accélération du vent géostrophique ; les advections sont supposées uniquement géostrophiques. En déduire que le vent agéostrophique peut s'écrire ainsi :

$$\vec{V}_a = \begin{pmatrix} u_a \\ v_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial v_g}{\partial t} - \dfrac{1}{f}\left[u_g \dfrac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \dfrac{\partial v_g}{\partial y}\right] \\ \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial u_g}{\partial t} + \dfrac{1}{f}\left[u_g \dfrac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \dfrac{\partial u_g}{\partial y}\right] \end{pmatrix} = \vec{V}_t + \vec{V}_s$$

Où $\vec{V}_i = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial v_g}{\partial t} \\ \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial u_g}{\partial t} \end{pmatrix}$ désigne le vent isallobarique

et $\vec{V}_s = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{f}\left[u_g \dfrac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \dfrac{\partial v_g}{\partial y}\right] \\ \dfrac{1}{f}\left[u_g \dfrac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \dfrac{\partial u_g}{\partial y}\right] \end{pmatrix}$ désigne le vent de structure

7. Démontrer que le vent isallobarique s'écrit : $\vec{V}_i = -\dfrac{1}{f^2}\vec{\nabla}_p\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial t}\right)$. Sur le schéma ci-dessous représenter approximativement $\vec{V}_g$, $\vec{V}_i$ et $\vec{V}_g + \vec{V}_i$ au point A. Comment le vent isallobarique dévie t-il le vent réel ?

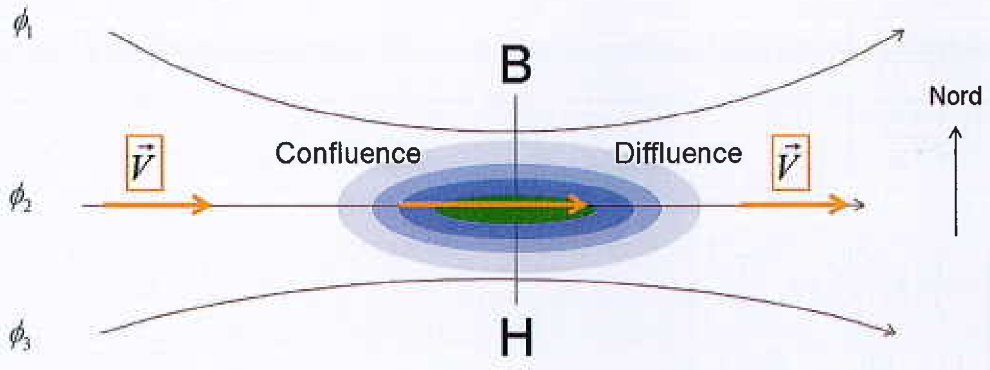


$\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$ $\quad \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial t}\right)_1 < \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial t}\right)_2 < \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial t}\right)_3$

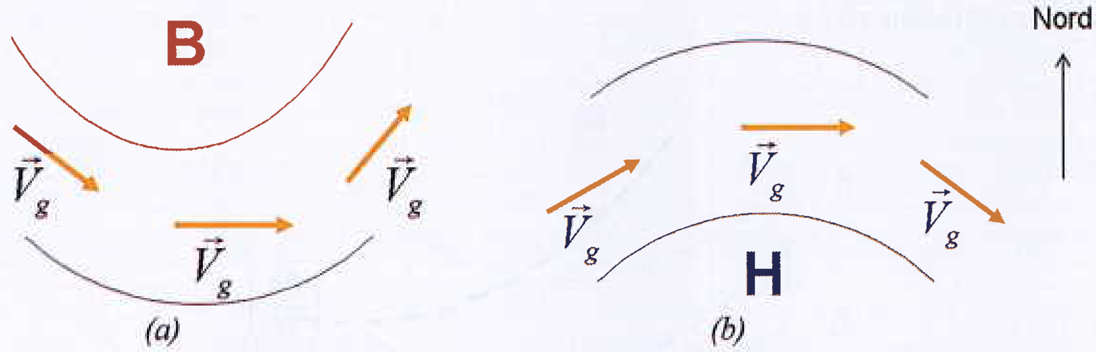
Nous nous placerons pour les questions suivantes dans un repère orthonormé direct mobile lié à la particule tel que l'axe des x est orienté parallèlement au vent géostrophique.

8. Comment se simplifie l'expression du vent de structure dans le repère mobile ?

9. On considère un cas idéalisé d'un rapide de jet d'ouest à 300 hPa associé une zone de confluence en entrée (accélération du flux) et une zone de diffluence en sortie (décélération du flux). Quelle est la composante du vent de structure mise en jeu dans cette configuration ? En déduire la correction agéostrophique et la déviation du vent réel en entrée et en sortie du rapide de jet. A quelles circulations verticales de grande échelle sont reliées ces circulations agéostrophiques ?



10. On considère les deux cas ci-dessous : un cas de forte courbure cyclonique *(a)* et un cas de forte courbure anticyclonique *(b)*. Quelle est la composante du vent de structure mise en jeu dans ces deux configurations ? En déduire la correction agéostrophique au niveau du thalweg et de la dorsale. Préciser dans chaque cas si le vent géostrophique surestime ou sous-estime le vent horizontal réel.



11. On considère le cas idéalisé d'une alternance d'un thalweg, d'une dorsale et d'un thalweg marqués à 300 hPa, le gradient isobare de géopotentiel est supposé constant. D'après la réponse à la question précédente, dans quelle région les ascendances de grande échelle seront-elles favorisées ? Justifier la réponse.