



**CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT  
D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DES TRAVAUX DE LA MÉTÉOROLOGIE  
SESSION 2017**

\*\*\*\*\*

**ÉPREUVE ÉCRITE OBLIGATOIRE  
PHYSIQUE**

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

La rigueur du raisonnement et la clarté de la présentation seront prises en compte dans la notation. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet comporte trois parties indépendantes :

- Partie 1 : thermodynamique (7,5 points/20)
- Partie 2 : circuit électrique (2,5 points/20)
- Partie 3 : mécanique du point - électromagnétisme (10 points/20)

Chaque partie comporte également des questions indépendantes.

La notation tiendra compte des justifications des réponses.

Cette épreuve comporte 6 pages (page de garde incluse).

# 1 Thermodynamique : cycle de Carnot

## 1. Questions de cours : états d'un corps et changements d'états

- (a) Rappeler le diagramme  $(p, T)$  d'équilibre d'un corps pur (cas général) : on fera apparaître les différents états du corps, ainsi que le point critique  $C$  et le point triple  $T$  et on justifiera l'allure des courbes tracées.
- (b) Rappeler le nom de tous les changements d'état d'un corps pur, en précisant de quelle à quelle phase il s'effectue, et le sens de variation de l'entropie.
- (c) Qu'est-ce que la pression de saturation ? La vapeur saturante ? Le liquide saturant ?
- (d) Donner la définition de la chaleur latente de vaporisation  $L_v$  et rappeler la formule de Clapeyron qui permet de la calculer.
- (e) Un changement d'état est-il réversible ? Comment varient la pression et la température d'un fluide lors de sa vaporisation ?

## 2. Exercice

La pression de vapeur saturante  $p_s(T)$  d'un fluide est donnée, en fonction de la température, par le tableau ci-dessous.

$T(^{\circ}\text{C})$	0	10	20	30	40	50
$p_s(\text{bar})$	2,920	4,129	5,694	7,678	10,15	13,17

On considère une masse  $m = 1 \text{ kg}$  de fluide à l'état de vapeur saturante dans les conditions  $p_o = 10.15 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 40^{\circ}\text{C}$  (état  $A$ ).

On donne :

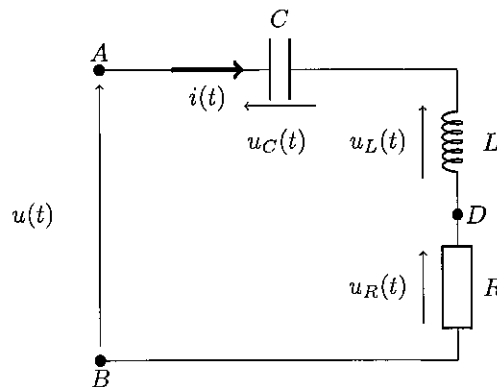
- Capacité thermique du liquide :  $c_\ell = 1.45 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Chaleur latente massique de vaporisation à
  - $T_1$  :  $\ell_v(T_1) = 162.9 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
  - $T_2$  :  $\ell_v(T_2) = 396.1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

- (a) A partir de l'état  $A$ , on provoque la liquéfaction totale du fluide au contact d'une source de chaleur à la température  $T_1$ . A la fin de cette transformation, le fluide se trouve dans l'état  $B$ . Déterminer puis calculer :
  - i. la quantité d'énergie  $Q_{AB}$  reçue par le fluide, par transfert thermique.
  - ii. la variation d'entropie du fluide  $\Delta S_{AB}$
- (b) Le liquide saturant correspondant à l'état  $B$  subit une détente adiabatique réversible de la pression  $p_1$  à la pression  $p_2 = 2.920 \text{ bar}$  où il se trouve dans l'état  $C$ . Soit le point  $C_o$  situé sur la courbe de saturation, tel que  $p_C = p_{C_o}$ . Déterminer l'expression et calculer :
  - i. La température  $T_2$  en  $C$ .

- ii. Le titre massique en vapeur  $x_C$  en  $C$ . On rappelle que le titre massique en vapeur est défini par  $x = \frac{m_v}{m_t}$ , où  $m_v$  est la masse de fluide à l'état vapeur et  $m_t$  la masse totale de fluide.
- (c) A partir de l'état  $C$ , on provoque la vaporisation partielle du liquide au contact d'une source de chaleur à la température  $T_2$ . La vaporisation est stoppée lorsqu'on atteint l'état  $D$  à partir duquel la compression adiabatique réversible du système liquide-vapeur permet de revenir à l'état  $A$ . Calculer :
- Le titre  $x_D$ .
  - La quantité d'énergie  $Q_{CD}$  reçue, par transfert thermique, par le fluide ainsi que ses variations d'enthalpie  $\Delta H_{CD}$  et d'entropie  $\Delta S_{CD}$ . On justifiera les expressions littérales.
- (d) Représenter, sur un diagramme de Clapeyron ( $p, T$ ), la courbe de saturation, ainsi que les différents états du fluide, et préciser quelle est la courbe de rosée et la courbe d'ébullition. Représenter alors les différentes transformations subies par le fluide, ainsi que les isothermes à  $T_1$  et  $T_2$ .

## 2 Circuit électrique : étude d'un circuit RLC

On considère le circuit suivant, dans lequel  $R = 50 \Omega$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$  et  $L = 0.1 \text{ H}$  :



- Déterminer l'expression  $Z_{AB}$  de l'impédance du dipôle  $AB$ , ainsi que celle du déphasage  $\varphi$  de la tension  $u(t)$  aux bornes du dipôle  $AB$  par rapport au courant  $i(t)$  qui parcourt le dipôle.
- Le dipôle  $AB$ , se comporte-t-il comme un dipôle inductif, comme un dipôle capacitif ou comme un dipôle résistif à haute fréquence? Et à basse fréquence, quel est son comportement?
- Déterminer l'expression de la fréquence  $f_o$  pour laquelle l'intensité efficace dans le circuit est maximale. Calculer sa valeur.
- Quel est le comportement du dipôle pour  $f_o$ ?
- Déterminer s'il existe une fréquence  $f_L$  pour laquelle il existe un phénomène de surtension aux bornes de la bobine.
- Déterminer s'il existe une fréquence  $f_C$  pour laquelle il existe un phénomène de surtension aux bornes du condensateur.

### 3 Mécanique : spectrographe de masse

On se propose de séparer les isotopes d'un même élément (atomes ou ions présentant des nombres de neutrons différents) en utilisant plusieurs techniques de sélection des ions. Les divers dispositifs comportent tous deux étages différents :

- un étage d'accélération des ions
- un étage de sélection-séparation des ions

#### Données :

- charge électrique élémentaire :  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- masse d'un nucléon (proton ou neutron) :  $m_P = m_N = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- masse de l'électron :  $m_e = 0.911 \times 10^{-30} \text{ kg}$
- accélération de la pesanteur  $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

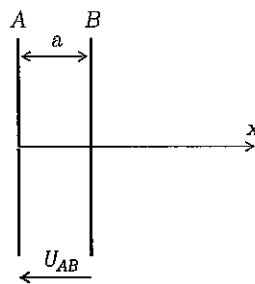
#### 1. Forces exercées :

- Comparer le poids et la force électrique qui s'exercent sur un proton soumis au champ électrique  $E = 3000 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$ . Conclure.
- Comparer le poids et la force magnétique qui s'exercent sur un électron soumis au champ magnétique  $B = 0.3 \text{ T}$  et animé d'une vitesse  $v = 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Conclure.

#### 2. Accélération des ions

Les ions, de charge  $q$  et de masse  $m$ , émis à partir d'un filament, ont une énergie cinétique considérée comme nulle lorsqu'ils arrivent sur la plaque  $A$  du condensateur qui va les accélérer.

Ce condensateur plan est constitué de deux plaques verticales  $A$  et  $B$  de surface  $S$ , distantes de  $a$  et percées d'un trou (Figure ci-dessous). On note  $\sigma$  la densité de charge surfacique sur son armature positive.



Entre les plaques est appliquée la différence de potentiel  $U_{AB} = V_A - V_B$ . Le champ électrique qui règne est  $\vec{E}_0$ .

#### (a) Etude du condensateur

- Les effets de bord étant négligés, déduire des propriétés de symétries et d'invariance du champ électrique, et, du théorème de Gauss, l'expression de  $\vec{E}_0$  en fonction de  $\sigma$  et de la permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$ .
- Quelle est la relation locale liant un champ électrique  $\vec{E}$  et le potentiel scalaire  $V$  associé? En déduire la relation liant  $E_0$  et  $U_{AB}$ .

iii. Déterminer l'expression de la capacité  $C$  du condensateur en fonction de  $\epsilon_0$  et de ses caractéristiques géométriques.

(b) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique en  $B$  pour un ion de charge  $q > 0$ , en fonction de  $q$  et  $U_{AB}$ , ainsi que la vitesse  $v_o$  des ions en  $B$ , en fonction de  $q, U_{AB}$  et  $m$ .

(c) Application numérique :  $U_{AB} = 5000 \text{ V}$

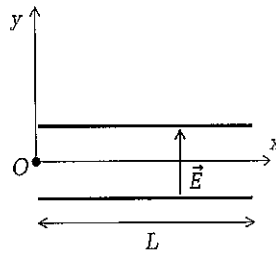
i. Calculer la vitesse  $v_o$  pour les ions des deux isotopes stables du lithium  ${}^6\text{Li}^+$  et  ${}^7\text{Li}^+$ , comportant respectivement 6 et 7 nucléons. Le numéro atomique du lithium est  $Z_{\text{Li}} = 3$ . On rappelle que le numéro atomique correspond au nombre d'électrons de l'atome.

ii. Justifier le fait que l'on ait considéré l'énergie cinétique en  $A$  comme nulle, sachant qu'elle est de l'ordre de  $0.1 \text{ eV}$ .

### 3. Séparation des ions par une méthode électrostatique

Soit le repère galiléen  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  où  $\vec{e}_z$  représente la verticale ascendante.

Suite à l'étape d'accélération, les ions pénètrent au point  $O$  avec la vitesse initiale  $\vec{v}_o = v_o \vec{e}_x$  (déterminée précédemment) entre les plaques horizontales d'un nouveau condensateur où règne le seul champ électrostatique  $\vec{E} = E \vec{e}_y$  avec ( $E > 0$ ). Les armatures de ce condensateur sont des carrés de côté  $L$ , et on néglige les effets de bord.



(a) Etablir les équations différentielles du mouvement relatives à  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ , et en déduire leurs expressions en fonction du temps  $t$  et des autres données de l'énoncé.

(b) En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire, ainsi que la pente de la courbe lorsque les ions vont sortir du condensateur (donc en  $x = L$ ), en fonction de  $\frac{q}{m}$ ,  $E$ ,  $L$  et  $v_o$ .

(c) Quelle est la trajectoire des ions après le condensateur ?

(d) On admet que  $v_o = K \sqrt{\frac{q}{m}}$  avec  $K$  constante positive.

i. Donner la valeur de  $K$ .

ii. Montrer que la pente à la trajectoire à la sortie du condensateur ne dépend pas de  $\frac{q}{m}$ .

iii. Que peut-on en conclure ?

### 4. Séparation par une méthode magnétostatique

Suite à l'étape d'accélération, les ions, animés de la vitesse initiale  $\vec{v}_o = v_o \vec{e}_x$ , pénètrent en  $O$  dans une région où règne cette fois-ci le seul champ magnétostatique uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  avec  $B > 0$ .

(a) Etablir les équations différentielles du mouvement relatives à  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ .

- (b) Que peut-on en déduire comme caractéristique de la trajectoire?
- (c) On se propose de déterminer la forme de la trajectoire par une méthode différente de la résolution des équations différentielles.
- i. Déduire de la définition de la force magnétique sa direction par rapport à la vitesse.
  - ii. En déduire l'expression de l'accélération tangentielle de la particule.
  - iii. Que peut-on en déduire pour la forme de la trajectoire?
  - iv. Exprimer le module de l'accélération en fonction de  $q$ ,  $m$ ,  $B$  et  $v_o$ .
  - v. Exprimer la relation entre le rayon  $R_c$  de courbure de la trajectoire,  $q$ ,  $m$ ,  $B$  et  $v_o$ .
- (d) i. Compte tenu de la relation  $v_o = K\sqrt{\frac{q}{m}}$ , exprimer la relation entre  $R_c$  et  $\frac{q}{m}$ .
- ii. En déduire la différence  $dR_c$  entre les rayons des trajectoires pour deux ions dont les valeurs de  $\frac{q}{m}$  diffèrent infiniment peu d'une quantité  $d\left(\frac{q}{m}\right)$ .
- iii. En déduire la différence relative  $\left(\frac{dR_c}{R_c}\right)$  en fonction de  $\frac{d\left(\frac{q}{m}\right)}{\frac{q}{m}}$ .
- iv. Application numérique : pour les ions  ${}^6\text{Li}^+$  et  ${}^7\text{Li}^+$ , l'écart  $\Delta\frac{q}{m}$  est suffisamment faible pour qu'on puisse le considérer comme égal à l'élément différentiel  $d\frac{q}{m}$ . Dans ces conditions, exprimer  $\frac{\Delta R_c}{R_c}$  en fonction de  $m$ , la masse moyenne des deux ions, et,  $\Delta m$  la différence de masse entre les deux ions. Calculer  $\frac{\Delta R_c}{R_c}$  et conclure.