CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT

D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DES TRAVAUX DE LA MÉTÉOROLOGIE

SESSION 2018

****

ÉPREUVE ÉCRITE OBLIGATOIRE

PHYSIQUE

Durée : 4 heures | Coefficient : 4

La rigueur du raisonnement et la clarté de la présentation seront prises en compte dans la notation.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La calculatrice est autorisée.

Le sujet comporte 4 parties indépendantes :
-partie 1 : Electromagnétisme (8 points)
-partie 2 : Mécanique des Fluides (4 points)
-partie 3 : Thermodynamique (4 points)
-partie 4 : Mécanique du Point et du Solide (4 points)
Les sous-parties sont également indépendantes.

Pour la partie en QCM, le point de chaque question sera attribué si et seulement si la ou les réponse(s) exacte(s) sont choisie(s). Il n'y a pas de point négatif.

Cette épreuve comporte 9 pages (hors page de garde).

Météo-France, établissement public administratif
Direction des ressources humaines
73, avenue de Paris 94165 Saint-Mandé Cedex

PHYSIQUE

1 Electromagnétisme

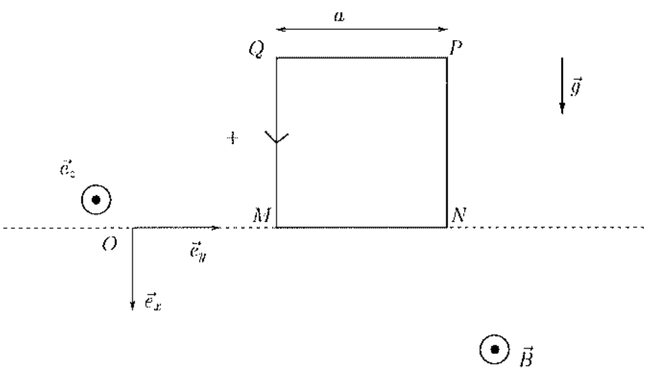
1.1 Onde

1. Ecrire les équations de Maxwell dans le vide.
2. Etablir l'équation de propagation du champ électrique.
3. Donner la définition de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe.

1.2 Induction en QCM

Il peut y avoir aucune (cas 5), une ou plusieurs réponses exactes. Répondre sur la copie rendue.

Un cadre MNPQ sur lequel est enroulé un circuit fermé constitué de $n = 100$ spires conductrices carrées de côtés $a = 10\ cm$, est placé verticalement de telle sorte qu'à l'instant initial, l'abscisse x de M soit nulle. Voir la représentation ci-dessous à l'état initial. Le circuit a une résistance $R = 10\ Ohm$ et un coefficient d'autoinduction $L = 10\ mH$. On applique dans le demi-espace $x > 0$, un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ avec $B_0 = 0,5\ Tesla$. Le cadre, initialement abandonné sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g_0\vec{e}_x$ avec $g_0 = 10\ m.s^{-2}$, pénètre dans la région magnétisée. On négligera les frottements et on adopte comme convention d'orientation algébrique du circuit le sens direct (voir figure). On se limite à l'étude du mouvement du cadre correspondant à une immersion partielle dans le champ magnétique c'est à dire que $0 < x < a$. La masse du cadre est $m = 200$ g.



Exprimer la force électromotrice induite e du circuit :

1. $e = n^2 B_0 a\dot{x}$
2. $e = 0$
3. $e = -nB_0 a\dot{x}$
4. $e = nB_0\frac{x^2\dot{x}}{a}$
5. Pas de réponse exacte

Exprimer la résultante des forces de Laplace $\vec{F}$ sur le circuit en fonction du courant induit i :

1. $\vec{F} = nB_0 ai\vec{e}_x$
2. $\vec{F} = -n^2 B_0 ai\vec{e}_x$

3. $\vec{F} = -B_0 a i \vec{e}_x$

4. $\vec{F} = \vec{0}$

5. Pas de réponse exacte

La loi des mailles du circuit électrique équivalent s'écrit :

1. $e = Ri$

2. $e = Ri + L\frac{di}{dt}$

3. $e = L\frac{di}{dt}$

4. $e = Ri - L\frac{di}{dt}$

5. Pas de réponse exacte

On pose $v = \dot{x}$. L'équation différentielle du mouvement s'écrit $\ddot{v} + \frac{1}{\tau}\dot{v} + \omega^2 v = \frac{g}{\tau}$.
Calculer τ :

1. $\tau = 1\ ms$

2. $\tau = 1\ s$

3. $\tau = 2\ ms$

4. $\tau = 16\ min\ 40\ s$

5. Pas de réponse exacte

Exprimer ω :

1. $\omega = \frac{nB_0a}{\sqrt{mL}}$

2. $\omega = \frac{nB_0x^2}{a\sqrt{mL}}$

3. $\omega = \frac{n^2B_0a}{\sqrt{mL}}$

4. $\omega = \frac{B_0a}{\sqrt{mL}}$

5. Pas de réponse exacte

On néglige l'auto-induction, l'équation du mouvement s'écrit $\dot{v} + \frac{1}{\tau'}v = g$. Exprimer τ' :

1. $\tau' = \frac{mR}{n^2B_0^2a^2}$

2. $\tau' = \frac{L}{R}$

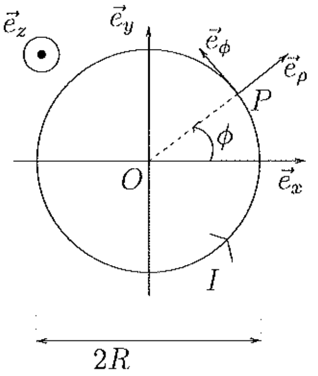
3. $\tau' = \sqrt{mL}nB_0a$

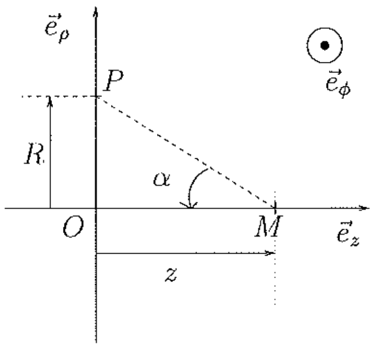
4. $\tau' = \frac{mR}{B_0^2a^2}$

5. Pas de réponse exacte

1.3 Magnétostatique

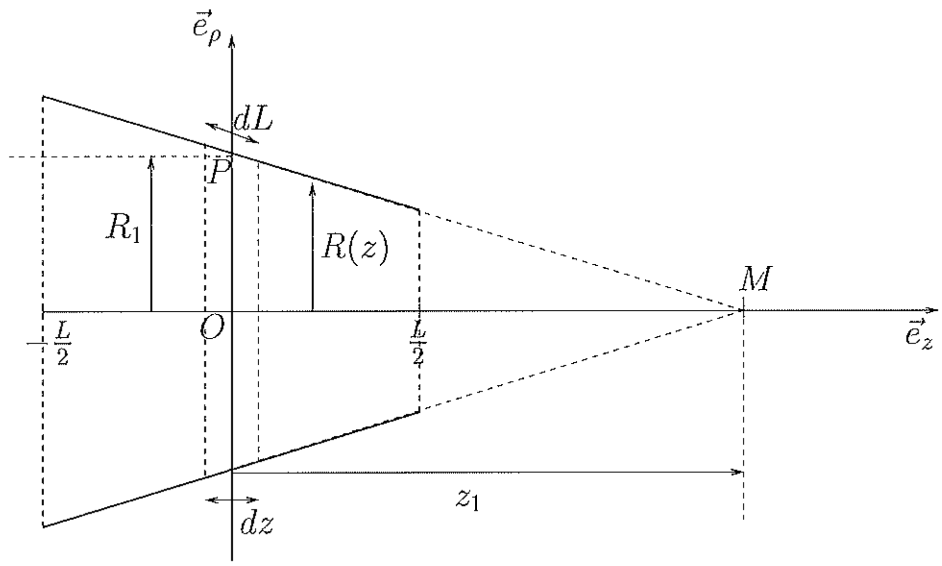
On considère une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant I dans le vide de perméabilité μ_0. On notera P un point courant de la spire.





1. En utilisant les symétries, donner la direction du champs $\vec{B}$ en un point M tel que $\overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z$.
2. Montrer que $\vec{B}(M) = K sin^3 \alpha$ où K est une constante que l'on exprimera en fonction de μ_0, I et R.
3. Toujours dans le vide, on demande de déduire de la question précédente le champs $\vec{B}(M)$ crée au milieu d'un solénoide infini. On pourra remarquer qu'une tranche dz de solénoide est parcourue par un courant $nIdz$ où n est le nombre de spires par mètre.
4. Retrouver ce résultat (solénoide infini) par application du théorème d'Ampère.

   Toujours dans le vide, on considère désormais un solénoide conique composé de n spire par mètre et parcouru par un courant $nIdL$. On précise que le rayon $R(z)$ du solénoide vaut R_1 en $z = 0$.



5. Exprimer dL en fonction de dz et α.
6. Exprimer $R(z)$ en fonction de z, α et R_1.
7. Calculer le champs $\vec{B}$ crée au point M tel que $\overrightarrow{OM} = z_1\vec{e}_z$.

1.4 Electrostatique

L'atome d'hydrogène est constitué d'un électron et d'un proton qui seront considérés comme des charges ponctuelles. Le proton est supposé fixe et placé à l'origine d'un repère $R(O, xyz)$. L'électron est mobile autour du proton et on ne peut lui attribuer une orbite précise. On propose pour l'atome d'hydrogène un potentiel électrostatique à symétrie sphérique de la forme :

$$V(M) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}exp(-\frac{r}{a})$$

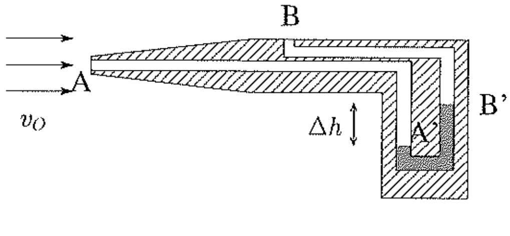
où a est une constante, e la charge élémentaire, ϵ_0 la permittivité du vide et $r = OM$.

1. Démontrer que l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dans la base sphérique $(0, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ peut s'écrire :
$$\vec{E}(M) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}(1 + \frac{r}{a})exp(-\frac{r}{a})\vec{e}_r$$
2. On étudie la distribution de charge associée à $V(M)$.
   (a) Démontrer (on pourra utiliser le théorème de Gauss) que l'expression de la charge $Q(r)$ contenue dans une sphère de centre O et de rayon r peut s'écrire :
$$Q(r) = e(1 + \frac{r}{a})exp(-\frac{r}{a})$$
   (b) Montrer que la charge totale dans tout l'espace est nulle et qu'il y a une charge ponctuelle en O.
3. (a) Exprimer, en fonction de e et a, la charge dQ comprise entre les sphères de rayon r et $r + dr$.
   (b) Tout se passe comme si la charge de l'électron était répartie autour du noyau avec une charge volumique $\rho(M)$. Trouver, en fonction de e et a, l'expression de cette densité à partir de sa définition.
   (c) A partir des équations de Maxwell en électrostatique, montrer que $\rho(M) = -\epsilon_0 \Delta V(M)$ avec Δ le laplacien.
4. Montrer que la charge $\frac{dQ}{dr} = f(r)$ passe par un minimum pour une valeur de r que l'on précisera. Interpréter le résultat obtenu.

2 Mécanique des Fluides

2.1 Le tube de pitot

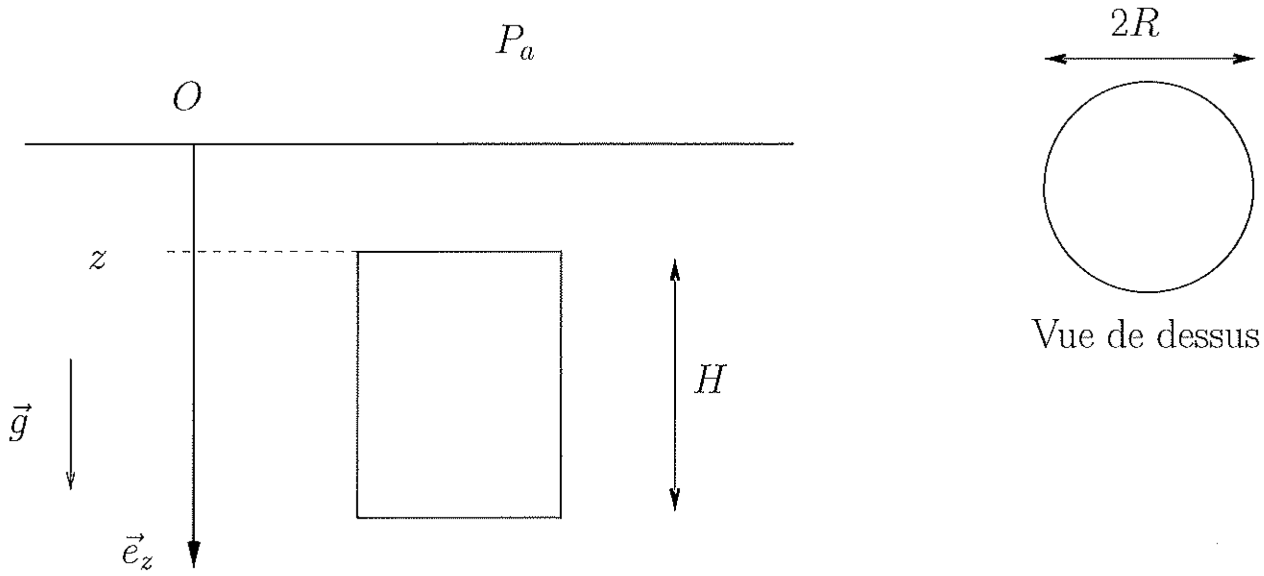
On utilise un tube de pitot pour mesurer la vitesse horizontale v_0 de l'air (masse volumique $\rho_0 = 1,225\ kg.m^{-3}$). On fera l'hypothèse que la pression en A est égale à la pression en A' et que la pression en B est égale à la pression en B'. Dans le manomètre en U du tube de pitot, on utilise un liquide de masse volumique $\rho_e = 1000\ kg.m^{-3}$. Ce liquide est au repos. La dénivellation indiquée par le manomètre en U étant $\Delta h = 10\ cm$ entre les points B' et A'. On prendra $g = 9.81$ $m.s^{-2}$ pour faire l'application numérique.



1. Enoncer le théorème de Bernoulli.
2. Donner l'expression de la vitesse de l'air v_0 en fonction de ρ_0, ρ_e, g et Δh.
3. Calculer v_o en $m.s^{-1}$.

2.2 Equilibre d'un cylindre dans un fluide stratifié

Considérons un cylindre de masse volumique ρ_c, de rayon R, de hauteur H, complètement immergé dans un liquide de masse volumique variable $\rho(z) = \rho_0(1 + \alpha z)$ où ρ_0 et α sont des constantes positives. La surface libre du liquide (en $z = 0$) est à la pression atmosphérique P_a. La surface supérieure S_1 du cylindre est à la profondeur z.



1. Quelle est la dimension de α ?
2. Donner l'expression de la pression $p(z)$ dans le liquide.
3. Calculer la résultante des efforts de pression $\vec{F_1}$ exercés par le fluide sur la surface supérieure S_1 du cylindre.
4. Calculer la résultante des efforts de pression $\vec{F_2}$ exercés par le fluide sur la surface inférieure S_2 du cylindre.
5. Montrer que la résultante des efforts de pression $\vec{F_0}$ exercés par le fluide sur la surface latérale S_0 du cylindre est nulle.
6. Donner alors l'expression de la résultante totale des efforts de pression $\vec{F}$ sur tout le cylindre.
7. Calculer le poids du fluide déplacé par le cylindre. Pouvait-on prévoir ce résultat ?
8. Déterminer la position d'équilibre z_0 du cylindre. Quelle condition doit vérifier ρ_c pour que le cylindre à l'équilibre soit complètement immergé ?

   On perturbe la position verticale du cylindre pour l'amener en $z_0 + \varepsilon$ avec $\varepsilon << 1$.
9. Calculer la résultante des forces s'exerçant sur le cylindre.
10. Donner l'équation différentielle vérifiée par ε et écrire la forme de la solution.
11. Conclure sur la stabilité de la position d'équilibre z_0 en fonction du signe de α.

3 Thermodynamique

On donne la constante des gaz parfaits $R = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$. On rappelle que $l = T\frac{\partial P}{\partial T})_V$ et $k = -T\frac{\partial V}{\partial T})_P$ dans les expressions $\delta Q = nC_{vm}dT + ldV = nC_{pm}dT + kdP$. On se propose d'étudier l'influence du rayonnement et de l'interaction gravitationnelle mutuelle sur le comportement d'un gaz parfait. Cette influence joue un rôle essentiel en astrophysique notamment sur la cohésion de notre galaxie.

3.1 Energie interne et entropie d'un gaz parfait monoatomique

1. A l'aide de considérations simples, retrouver l'expression $U = \frac{3}{2}nRT$ de l'énergie interne de n moles d'un gaz parfait monoatomique, en fonction de la température thermodynamique T. En déduire la capacité thermique molaire à volume constant C_{vm} du gaz, ainsi que sa capacité thermique molaire à pression constante C_{pm}. Quelle est la valeur du rapport $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$?

2. Etablir l'expression de l'entropie de n moles d'un gaz parfait monoatomique en fonction de la température T et du volume V. Commenter le rôle de la constante additive qui apparait dans cette expression.

3. Le gaz parfait considéré se détend au cours d'une évolution isentropique. Etablir la relation entre T et V. Calculer la variation de température d'un gaz parfait, dont la température initiale est $T = 200\ K$, lorsque son volume est multiplié par dix.

4. Le gaz prend de la chaleur d'une seule source extérieure de telle sorte que son évolution soit réversible. Effectuer un bilan énergétique et entropique pour une mole d'un gaz parfait monoatomique subissant, à la température $T = 300\ K$, une détente au cours de laquelle son volume est multiplié par dix. On constate que le gaz fournit du travail alors qu'il est en relation avec une seule source. Un tel résultat n'est pas en contradiction avec l'énoncé de lord Kelvin du deuxième principe de la thermodynamique. Pourquoi ?

3.2 Thermodynamique du rayonnement

Au rayonnement émis par un corps noir, dont l'énergie électromagnétique volumique est w, correspond un gaz de photons dont la pression de radiation est : $P = \frac{w}{3}$. On admettra que w ne dépend que de T et que l'énergie interne du gaz occupant un volume V est $U = wV$.

1. Etablir la relation générale suivante entre l'énergie interne U et la pression P :

$$\frac{\partial U}{\partial V})_T = T\frac{\partial P}{\partial T})_V - P$$

2. Montrer que $w = aT^4$, a étant un coefficient dont on précisera l'unité SI.

3. Montrer que l'entropie associée au rayonnement a pour expression $S = AT^3V$, à une constante additive près, A étant une constante que l'on déterminera en fonction de a. En déduire qu'une évolution isentropique satisfait à une équation de la forme $TV^{\gamma_r - 1} = C^{ste}$, γ_r étant une constante que l'on déterminera.

3.3 Entropie d'un gaz parfait monoatomique rayonnant

Justifier que l'entropie et l'énergie interne de n moles d'un gaz parfait rayonnant sont :

$$S = n\frac{R}{\gamma - 1}lnT + nRlnV + AT^3V + C^{ste}$$

$$U = n\frac{R}{\gamma - 1}T + aT^4V$$

3.4 Thermodynamique d'un gaz parfait autogravitant et rayonnant

Un gaz est dit autogravitant lorsqu'on doit tenir compte de l'interaction gravitationnelle mutuelle entre les particules qui le constituent. On admet que l'énergie interne U du gaz parfait rayonnant autogravitant est la somme de l'énergie interne du gaz parfait monoatomique rayonnant et de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle E_{pg}.

1. Montrer que l'énergie cinétique E_k et l'énergie potentielle de gravitation $E_p = -G\frac{mM}{r}$ d'un satellite de masse m en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre de masse M, par rapport au référentiel géocentrique, sont reliées par la relation $2E_k + E_p = 0$. On précise que r est la distance du centre de la terre au satellite et que G est la constante d'attraction universelle.

2. Commenter dans ce cas la phrase apparemment paradoxale : " La vitesse du satellite augmente lorsqu'il est soumis à une force de freinage ".

3. On modélise le gaz parfait rayonnant autogravitant par le modèle précédent. On a alors $2E_k + E_{pg} = 0$ où $E_k = \frac{3}{2}nRT$ est l'énergie cinétique de n moles d'un gaz parfait monoatomique. Exprimer l'énergie interne de n moles d'un gaz parfait monoatomique rayonnant et autogravitant en fonction de n, R, T, a et V.

4. Montrer que la capacité thermique à volume constant de ce gaz est :

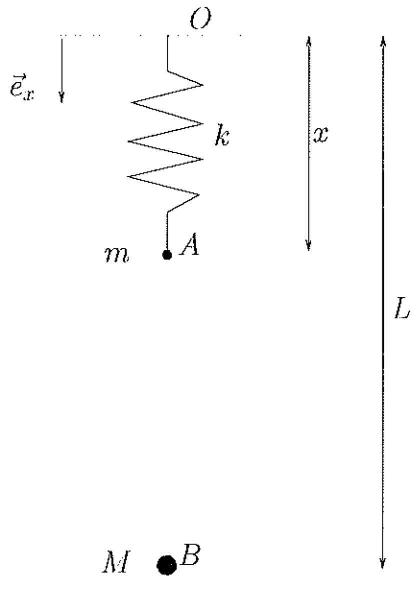
$$C_{vg} = -\frac{3}{2}nR + 4aT^3V$$

5. Le coefficient a est donné par la loi de Planck $a = \frac{8\pi^5}{15}\frac{k_B{}^4}{h^3c^3}$ où $k_B = 1,38.10^{-23}\ J.K^{-1}$ (constante de Boltzmann), $h = 6,626.10^{-34}\ J.s$ (constante de Planck) et $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$ (célérité de la lumière). Soit une nébuleuse de $10^{30}\ kg$ de di-oxygène (Masse molaire O_2 est $32\ g.mol^{-1}$) à la température de $10\ K$. Quel volume critique doit-elle occuper pour rester stable (c'est à dire pour garder une capacité thermique à volume constant positive) ?

4 Mécanique

4.1 Mécanique du point

Il s'agit d'étudier les positions d'équilibre et le mouvement autour de ces éventuelles positions d'équilibre d'un point A de masse m soumis à deux forces : la force de rappel d'un ressort de raideur k de longueur à vide négligeable attaché en O et de la force d'attraction universelle due à la présence d'une masse ponctuelle M en B située à une distance L de O (on note G la constante d'attraction). Le mouvement est monodimensionnel selon l'axe $(O, \vec{e}_x)$ tel que $\overrightarrow{OB} = L\vec{e}_x$ et $\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_x$ avec $x \in [0, L]$.



1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au point A projeté selon $\vec{e}_x$.

2. Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p du point A.

3. Afin de réduire le nombre de paramètres, on effectue les changements de variables suivant : $x = x^*L$, $t = t^*\sqrt{\frac{m}{k}}$ et $E_p = E_p^* kL^2$. En déduire que

$$-x^* + \alpha\frac{1}{(1-x^*)^2} = \frac{d^2x^*}{dt^{*2}}$$

$$E_p^* = \frac{x^{*2}}{2} - \frac{\alpha}{(1-x^*)}$$

avec α que l'on exprimera en fonction de G, m, M, k et L.

4. Quelle est la dimension physique de α?

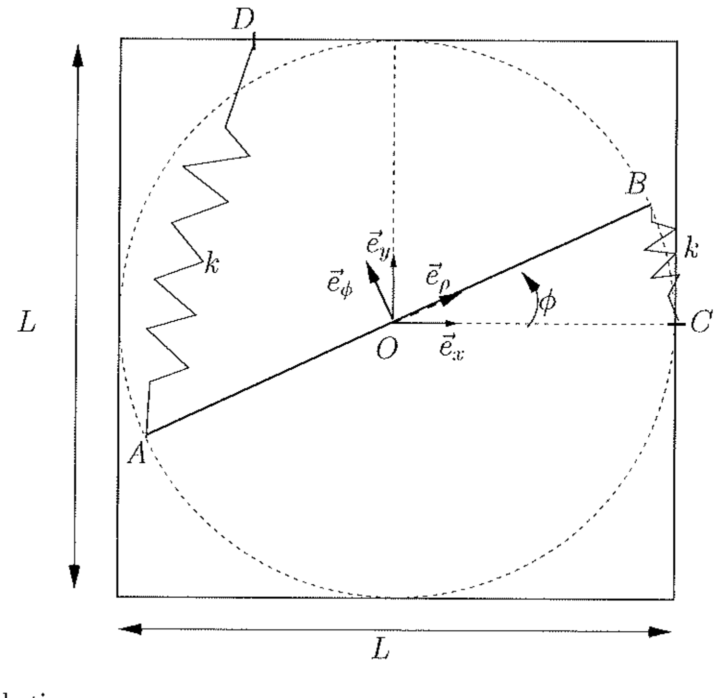
5. Donner une interprétation physique de α.

6. Discuter l'existence d'une ou plusieurs solutions d'équilibre notées x^*_{eq} en fonction de α.

7. On donne les valeurs numériques des paramètres : $m = 1\ kg$, $M = 5.9\ 10^{24}\ kg$, $L = 6371\ km$, $k = 100\ N.m^{-1}$ et $G = 6.6\ 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$. Evaluer la valeur de α et en déduire le nombre de position d'équilibre.

4.2 Mécanique du solide

Il s'agit d'étudier les positions d'équilibre et le mouvement autour de ces éventuelles positions d'équilibre d'une tige rigide AB de masse m, de longueur L et de centre O. On définit le repère polaire $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$ lié à la tige. On note $I_{Oz} = \frac{1}{12}mL^2$ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Oz). La tige est susceptible de tourner autour de l'axe (Oz) via une liaison pivot parfaite en O. La tige est reliée via ses extrémités au bati (en C et en D) par deux ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide négligeable. On précise que $\overrightarrow{OA} = -\frac{L}{2}\vec{e}_\rho$, $\overrightarrow{OB} = \frac{L}{2}\vec{e}_\rho$, $\overrightarrow{OC} = \frac{L}{2}\vec{e}_x$ et $\overrightarrow{OD} = \frac{L}{2}\vec{e}_y - \frac{L}{4}\vec{e}_x$. On négligera le poids de la tige.



1. Exprimer l'énergie cinétique E_c de la tige.

2. Rappeler l'expression générale de l'énergie potentielle d'un ressort de longueur L, de longueur à vide nulle et de raideur k.

3. Exprimer l'énergie potentielle de ce système (c'est à dire l'énergie potentielle des deux ressorts) sous la forme $E_p = \frac{kL^2}{8}(asin\phi + bcos\phi) + Cste$ où a et b sont des valeurs numériques que l'on déterminera.

4. Déterminer la (ou les) position(s) d'équilibre.

5. Est-elle (sont-elles) stable(s)?
6. Quelle est la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable?