CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT DE :

- **Techniciens de deuxième grade relevant du domaine d'activité de la météorologie du statut particulier des personnels techniques de Nouvelle-Calédonie.**

****

SESSION 2015

****

EPREUVE ECRITE OBLIGATOIRE N°2 :

MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE-CHIMIE

Durée : 3 heures — Coefficient : 5

La rigueur, le soin et la clarté apportés à la rédaction des réponses seront pris en compte dans la notation.
L'usage de la calculatrice est autorisé.
L'utilisation du téléphone portable et de toute documentation est strictement interdite.

Cette épreuve se compose de deux parties :
- Partie A : Mathématiques (pages 1 à 6)
- Partie B : Physique (pages 7 à 14)

A l'issue de l'épreuve, le candidat devra rendre uniquement les deux documents-réponse fournis (un document-réponse par partie) sur lesquels il aura préalablement collé son étiquette d'anonymat et indiqué son centre de concours **sans aucune autre mention.**

Ce sujet comporte 14 pages (page de garde incluse).

PARTIE A - MATHEMATIQUES

Le sujet comporte 4 exercices indépendants sous forme de QCU.
Une seule réponse est exacte par item.
Les résultats doivent être portés sur la feuille réponse fournie.

1- On considère les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$.

Question 1 :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x) < 0$ et les courbes d'équation $y = f_n(x)$ passent toutes par le point $A\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \geq 0$ et les courbes d'équation $y = f_n(x)$ passent toutes par le point $A\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x) < 0$ et les courbes d'équation $y = f_n(x)$ n'ont pas de point en commun.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \geq 0$ et les courbes d'équation $y = f_n(x)$ n'ont pas de point en commun.

Question 2 :

a) La fonction f_0 est décroissante, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = -\infty$

b) La fonction f_0 est décroissante, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = 0$

c) La fonction f_0 est croissante, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = 1$

d) La fonction f_0 est croissante, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = 1$

Question 3 :

a) La fonction f_1 est décroissante, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$

b) La fonction f_1 est décroissante, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty$

c) La fonction f_1 est croissante, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

d) La fonction f_1 est croissante, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

2- Exercice sur des suites.

Question 4 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{-4}{4+u_n} \end{cases}$

a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et, pour tout $n \in \mathbb{N}, -2 < u_n \leq 0$

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et, pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 2$

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et, pour tout $n \in \mathbb{N}, -2 < u_n \leq 0$

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et, pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 2$

Question 5 :

On considère les suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{2}{1+a_n} \end{cases}$ et $b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 2}$

a) La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2 et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

b) La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2 et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -2$

c) La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$

d) La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{-1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$

Question 6 :

On considère la suite arithmétique $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r = -2$ et telle que $w_{10} = 25$.

a) $w_0 = 5$ et $w_{50} = -95$

b) $w_0 = 45$ et $w_{50} = -55$

c) $w_0 = 15$ et $w_{50} = -85$

d) $w_0 = 15$ et $w_{50} = -115$

3- Exercice de géométrie dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

<u>Question 7 :</u>

On considère le plan P d'équation cartésienne $x-2y+z-1=0$ et la droite d admettant la

représentation paramétrique suivante : $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t \\ z=2+3t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$

a) La droite d est perpendiculaire à P.

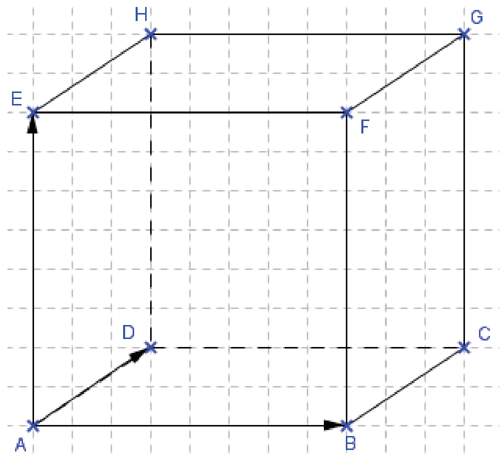
b) Le plan contenant d et perpendiculaire à P admet pour équation : $x+y+1=0$.

c) Le plan contenant le point A(1,1,1) et perpendiculaire à P admet pour équation : $x+2y+3z-6=0$.

d) Le plan d'équation : $-2x+y+z+7=0$ est perpendiculaire à P.

<u>Question 8 :</u>

On considère le cube $ABCDEFGH$ suivant :



On définit les points I, J et K par : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}$; $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{DH}$.

a) $I=G$; $J=C$; $K=D$

b) $I=F$; $J=H$; $K=D$

c) $I=F$; $J=C$; $K=C$

d) L'un, au moins, parmi les points I, J, K n'est pas sur le cube.

Question 9 :

On considère les droites d et d' admettant pour représentation paramétrique respective :

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 1 - 4t \\ z = 3t + 2 \end{cases} \;,\; t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -2 - \dfrac{t}{3} \\ y = 3 + \dfrac{2}{3}t \\ z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{2} \end{cases} \;,\; t \in \mathbb{R}.$$

a) Les droites d et d' sont sécantes.

b) Les droites d et d' sont non coplanaires.

c) Les droites d et d' sont strictement parallèles.

d) Les droites d et d' sont confondues.

4- Exercice de probabilités.

Question 10 :

On dispose de deux pièces de monnaie : l'une est bien équilibrée, alors que l'autre est truquée et tombe sur « pile » avec une probabilité de 0,7. On lance la pièce truquée en premier, si le résultat est « pile », on lance alors la pièce équilibrée, alors que si le résultat est « face », on relance la pièce truquée. On cherche la probabilité p d'avoir « pile » au deuxième lancer.

a) $p = 0{,}5$

b) $p = 0{,}56$

c) $p = 0{,}43$

d) $p = 0{,}35$

Question 11 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left]-\infty;1\right[\\ \dfrac{k}{x^4} & \text{si } x \in \left[1;+\infty\right[\end{cases}$$

a) La fonction est une densité de probabilité si $k = \dfrac{-1}{3}$.

b) La fonction est une densité de probabilité si $k = -3$.

c) La fonction est une densité de probabilité si $k = \dfrac{1}{3}$.

d) La fonction est une densité de probabilité si $k = 3$.

Question 12 :

Une usine produit des vis de longueur 25mm (50%), 35mm (30%) et 45mm (20%) et les conditionne dans des boites contenant 40 vis. On prélève au hasard une boite et on cherche à déterminer l'intervalle $I_{95\%}$ dans lequel la proportion de vis de 35mm doit se trouver, avec plus de 95% de chance.

a) $I_{95\%} = [0,113; 0,487]$

b) $I_{95\%} = [0,158; 0,442]$

c) $I_{95\%} = [0,142; 0,458]$

d) $I_{95\%} = [0,285; 0,315]$

PARTIE B – PHYSIQUE ET CHIMIE

Le sujet est un QCU, questionnaire à choix unique, composé de 7 exercices indépendants comprenant chacun 1 à 3 questions. Chaque question a une réponse exacte et une seule.
Vous porterez votre réponse en cochant la case correspondant à votre choix sur le document-réponse distribué avec le sujet.
Eléments de barème :
- Toute réponse illisible, fausse ou multiple sera pénalisée.
- Les questions restées sans réponse ne seront pas prises en compte.

Exercice 1 : ondes le long d'une corde

Une corde de 20 m de long dont l'extrémité est fixée à un amortisseur subit une perturbation. La source a un mouvement périodique. La corde est représentée ci-dessous à deux dates différentes :
Photo à la date t = 2,0s

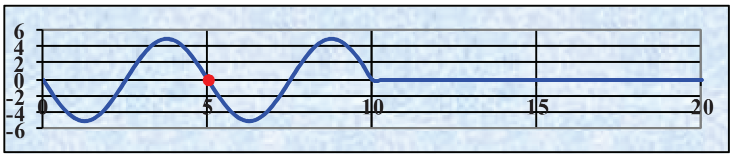
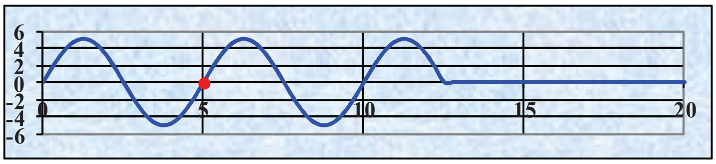


Photo à t=2,5 s :

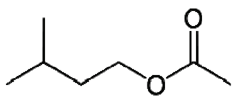


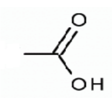
Question 13

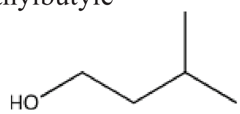
Déterminer la célérité de l'onde :

A	B	C	D
c= 5,0 m.s^{-1}	c= 10 m.s^{-1}	c= 0,50 m.s^{-1}	c= 0,20 m.s^{-1}

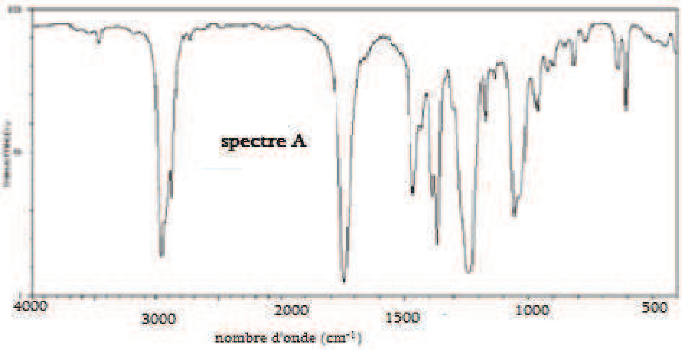
Exercice 2 : spectroscopie IR

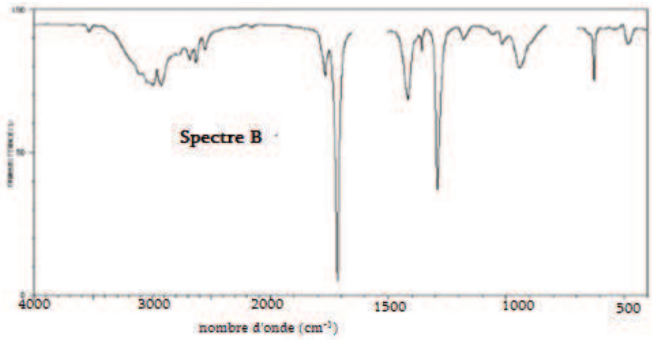
La synthèse de l'arôme de banane (éthanoate de 3-méthylbutyle 

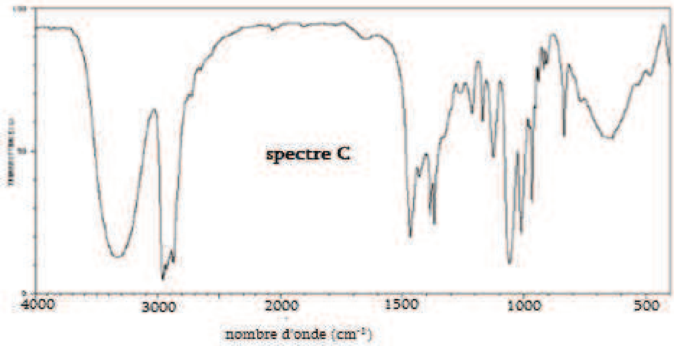
) s'effectue en faisant réagir de l'acide éthanoïque 

et du 3-méthylbutan-1-ol 

.







Absorptions caractéristiques de quelques liaisons en spectroscopie infrarouge	
Liaison	*Nombre d'onde σ (cm^{-1})*
C–H	2 800 – 3 100
C–C	600 – 1 400
C=C	1 500 – 1 700
C≡C	2 200
C–O	1 000 – 1 300
C=O	1 700 – 1 750
O–H *libre*	3 600 *(assez fine)*
O–H *lié*	3 300 *(large)*
O–H *acide carboxylique*	2 500 – 3 200 *(assez large)*

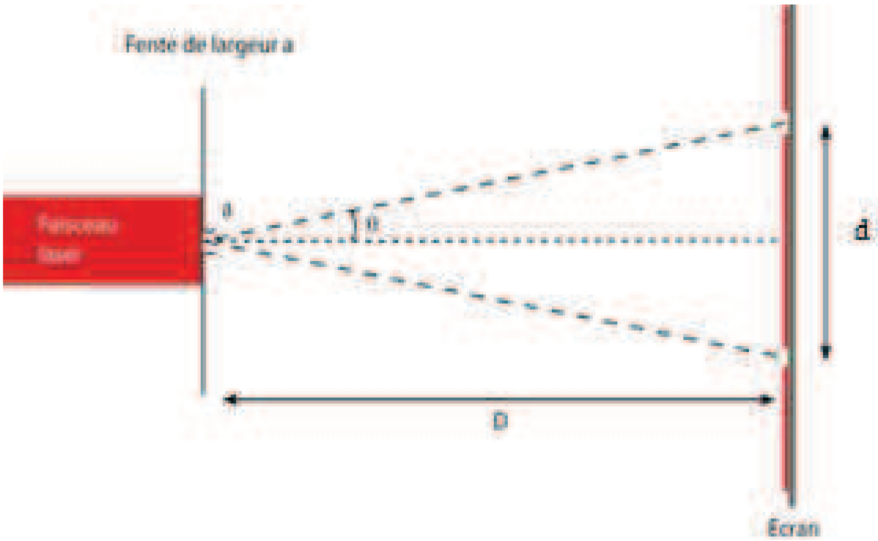
<u>Question 14</u>

Attribuer à chaque spectre le composé organique correspondant.

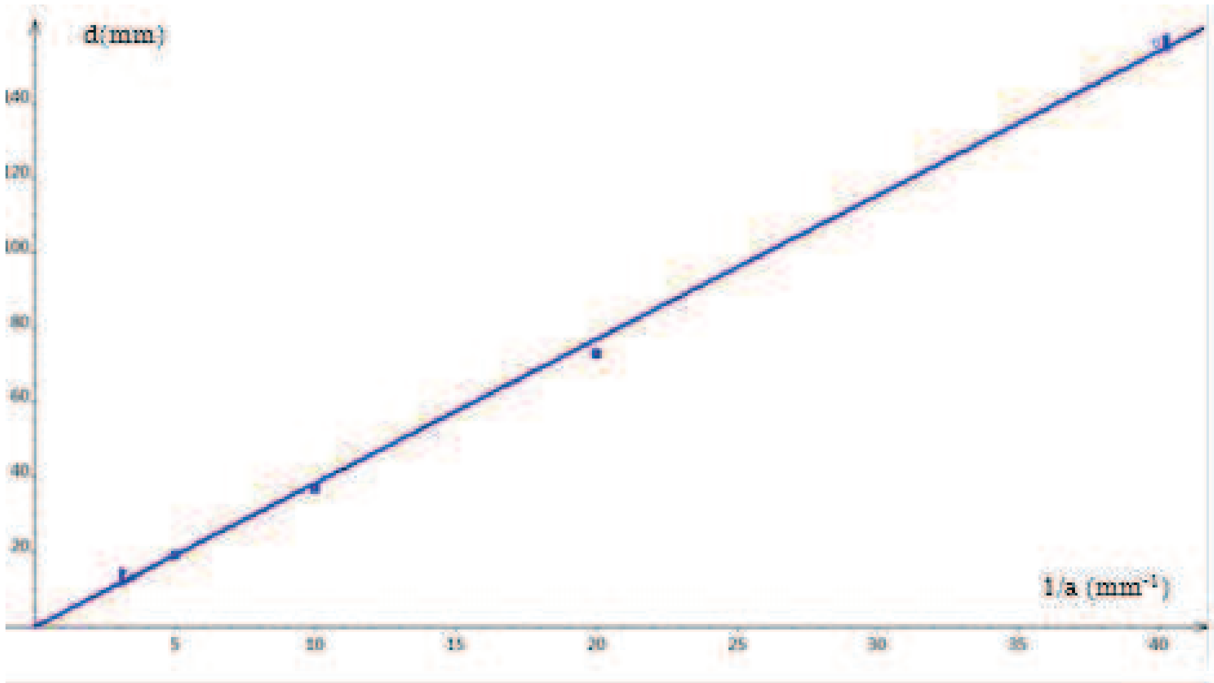
A	B
Spectre A : 3-méthylbutan-1-ol Spectre B : acide éthanoïque Spectre C : éthanoate de 3-méthylbutyle	Spectre A : éthanoate de 3-méthylbutyle Spectre B : 3-méthylbutan-1-ol Spectre C : acide éthanoïque
C	**D**
Spectre A : acide éthanoïque Spectre B : éthanoate de 3-méthylbutyle Spectre C : 3-méthylbutan-1-ol	Spectre A : éthanoate de 3-méthylbutyle Spectre B : acide éthanoïque Spectre C : 3-méthylbutan-1-ol

Exercice 3 : DVD

On désire mesurer la longueur d'onde du laser utilisé dans un lecteur de DVD.
Pour cela, on envoie le rayon laser sur une fente rectiligne de largeur calibrée notée a. Les figures de diffraction sont observées sur un écran placé perpendiculairement au rayon et à une distance D= 2,9 m des fentes. a est variable.



On mesure sur l'écran la largeur de la tache centrale notée d. Les résultats permettent de tracer la courbe représentant d en fonction de 1/a.



L'angle étant petit, on fait l'approximation suivante : $\tan\theta \approx \theta$

Question 15

Déterminer l'expression de la largeur de la tache centrale.

A	B	C	D
$d=\dfrac{2\lambda a}{D}$	$d=\dfrac{2\lambda D}{a}$	$d=\dfrac{\lambda D}{a}$	$d=\dfrac{\lambda a}{2D}$

Question 16

Déterminer approximativement la longueur d'onde du laser.

A	B	C	D
$\lambda = 6{,}6.10^{-1}$m	$\lambda = 6{,}6.10^{-7}$m	$\lambda = 3{,}8.10^{-6}$m	$\lambda = 1{,}3.10^{-6}$m

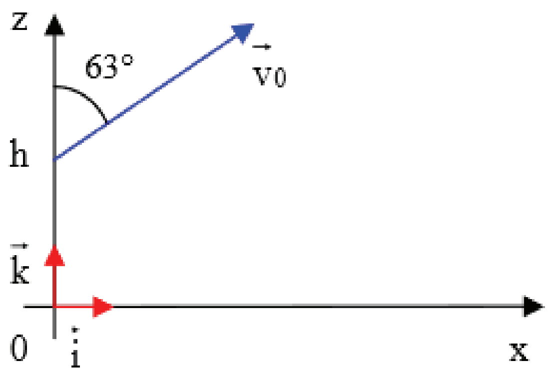
Question 17

On considère une image numérique de 10 cm x 10 cm possédant une résolution de 100 pixels par cm et chaque pixel est codé sur 24 bits. La capacité de stockage d'un DVD est de 4,7 Go.
Le nombre d'images de ce type que l'on peut stocker sur un DVD est :

A	B	C	D
$1{,}6.10^{3}$ images	$1{,}6.10^{5}$ images	$2{,}9.10^{5}$ images	$2{,}0.10^{2}$ images

Exercice 4 : décollage de la fusée Soyouz

Une fusée Soyouz est constituée d'un corps cylindrique et de quatre boosters. Les boosters sont destinés à entrainer la fusée lors du décollage mais ils consomment très rapidement les 160 tonnes de carburant qu'ils contiennent et quittent la fusée au bout de 2 min 10 s de vol.



Soit le repère $(O;\vec{i};\vec{k})$ lié au sol à la verticale de l'endroit où est lâché le booster. On considère que le référentiel est galiléen et que l'on peut assimiler le booster à son centre d'inertie G. A l'instant t = 0s, le booster est décroché de la fusée avec une vitesse initiale v_0 = 1,82 km.s^{-1} et son vecteur vitesse fait alors un angle α = 63° avec la verticale. Cette séparation est effectuée à une altitude h = 53,4 km. On néglige les frottements et l'intensité de la pesanteur est considérée comme constante et égale à 9,6 m.s^{-2}.

Question 18

Etablir les équations horaires du centre d'inertie du booster.

A	B
$x(t) = (v_0 \times \sin\alpha) \times t$ $z(t) = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + (v_0 \times \cos\alpha) \times t$	$x(t) = (v_0 \times \cos\alpha) \times t$ $z(t) = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + (v_0 \times \sin\alpha) \times t + h$
C	D
$x(t) = (v_0 \times \sin\alpha) \times t$ $z(t) = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + (v_0 \times \cos\alpha) \times t + h$	$x(t) = (v_0 \times \sin\alpha) \times t + h$ $z(t) = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + (v_0 \times \cos\alpha) \times t$

Question 19

L'altitude maximale z_{max} atteinte par le booster avant de retomber vaut :

A	B	C	D
36 km	89 km	190 km	137 km

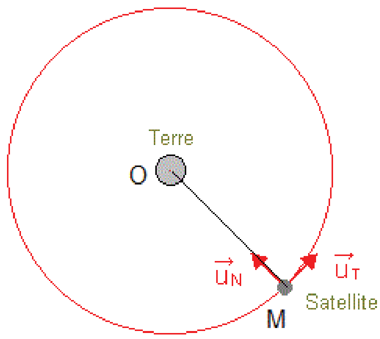
Exercice 5 : mise en orbite du vaisseau Progress

La fusée Soyouz ayant achevé son ascension libère le vaisseau Progress, lui aussi muni d'une propulsion à réaction, et qui va seul se placer sur une orbite circulaire à h= 334 km d'altitude. Nous considèrerons cette orbite comme circulaire.

Masse de la Terre : $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg

Rayon de la Terre : $R_T = 6380$ km

$G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^{2}kg^{-2}



Question 20

L'accélération du satellite dans le repère $(M, \overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N})$ s'écrit :

A	B	C	D
$\vec{a} = -\frac{GM_T}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{u_N}$	$\vec{a} = \frac{GM_T}{R_T^2}\overrightarrow{u_N}$	$\vec{a} = \frac{GM_T}{h^2}\overrightarrow{u_N}$	$\vec{a} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{u_N}$

Question 21

La vitesse v du vaisseau sur l'orbite d'altitude 334 km vaut :

A	B	C	D
244 $km.s^{-1}$	34,6 $km.s^{-1}$	7,71 $km.s^{-1}$	7,91 $km.s^{-1}$

Exercice 6 : isolation thermique

Un chalet réalisé en sapin d'épaisseur 5,0 cm doit être aménagé et isolé. Le propriétaire fixe sur la totalité des murs une cloison constituée de polystyrène d'épaisseur 12 cm accolée à une couche de plâtre de 2,0 cm d'épaisseur. La surface ainsi recouverte est de S = 50 m^2. Le chalet est aussi constitué d'une porte fenêtre vitrée et d'une fenêtre de surface totale S'= 4,0 m^2 et la résistance thermique du verre utilisé vaut R_{Th}(verre) = 0,60 $K.m^2.W^{-1}$.

Données :

Pour calculer la résistance thermique d'un ensemble, on se réfère aux règles suivantes :

- *quand plusieurs matériaux sont superposés sur une même surface, la résistance thermique totale est la somme des résistances thermiques de chaque matériau ;*
- *quand un mur est constitué de différents panneaux, l'inverse de la résistance thermique totale est la somme des inverses des résistances thermiques de chaque panneau.*

Résistance thermique : $R_{Th} = \frac{e}{\lambda}$ *avec e = épaisseur et* λ = conductivité thermique

Flux thermique : $\Phi = \frac{S \times (\theta_2 - \theta_1)}{R_{Th}}$ *avec S = surface de la paroi et* θ_2, θ_1 *les températures de part et d'autre de la paroi.*

λ_{sapin} = 0,15 $W.m^{-1}.°C^{-1}$ $\lambda_{polystyrène}$ = 0,045 $W.m^{-1}.°C^{-1}$ $\lambda_{plâtre}$ = 0,35 $W.m^{-1}.°C^{-1}$

Question 22

Calculer la résistance thermique des murs isolés $R_{Th(mur)}$ puis la résistance thermique totale du chalet $R_{th(chalet)}$:

A	B	C	D
$R_{Th(mur)}$=3,1 $K.m^2.W^{-1}$ $R_{th(chalet)}$=3,7 $K.m^2.W^{-1}$	$R_{Th(mur)}$=21 $K.m^2.W^{-1}$ $R_{th(chalet)}$=22 $K.m^2.W^{-1}$	$R_{Th(mur)}$=0,048 $K.m^2.W^{-1}$ $R_{th(chalet)}$=0,65 $K.m^2.W^{-1}$	$R_{Th(mur)}$=3,1 $K.m^2.W^{-1}$ $R_{th(chalet)}$=0,50 $K.m^2.W^{-1}$

Exercice 7 : pendule élastique

On dispose d'un système {solide, ressort} constitué d'un mobile de masse *m* = 46 g considéré comme un point matériel G accroché à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur *k*. Le système est installé sur une table à coussin d'air afin de négliger les frottements entre le mobile et la table. Ce mobile, assimilé à son centre d'inertie G, peut osciller horizontalement sans frottement sur une tige parallèle à l'axe Ox (**figure 1**). On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le point O coïncide avec la position de G lorsque le ressort est au repos. A t = 0s, le solide est lâché sans vitesse initiale depuis la position $x = x_0$.

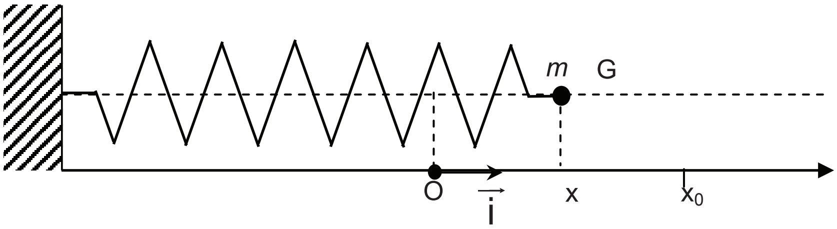
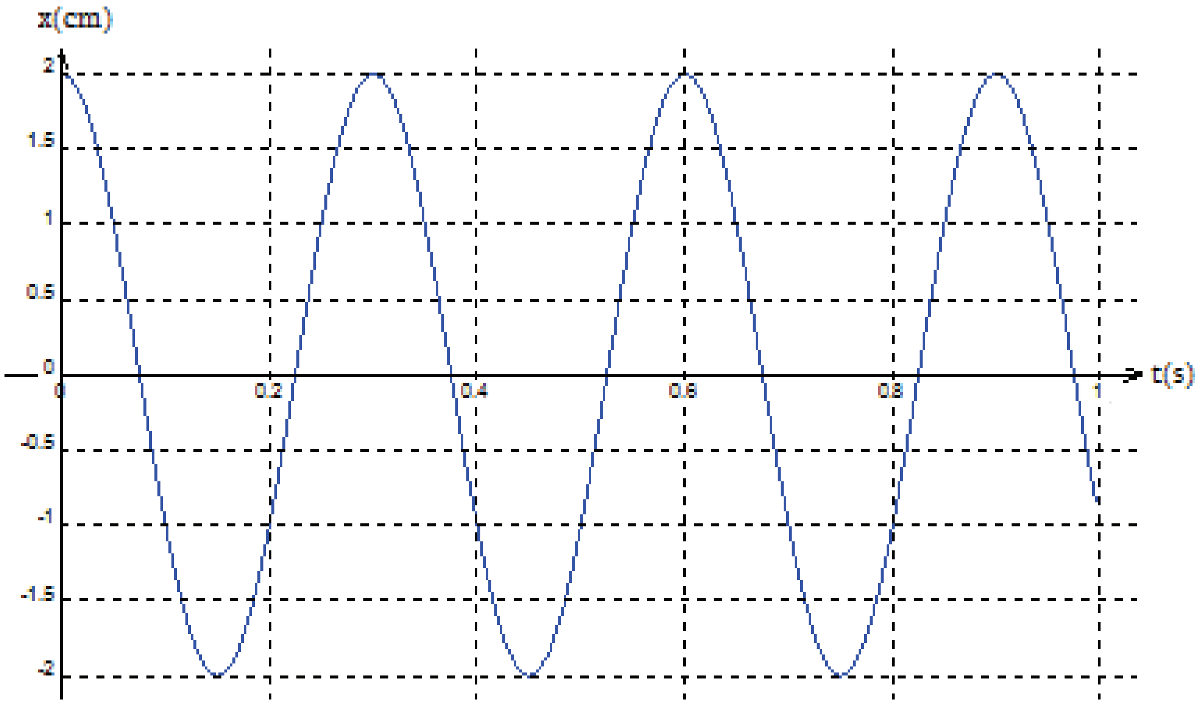


Figure 1

Le graphique ci-dessous représente la position de G en fonction du temps.



Données :

Période propre d'un pendule élastique : $T = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Energie potentielle élastique : $E_p = \dfrac{1}{2} \times k \times x^2$

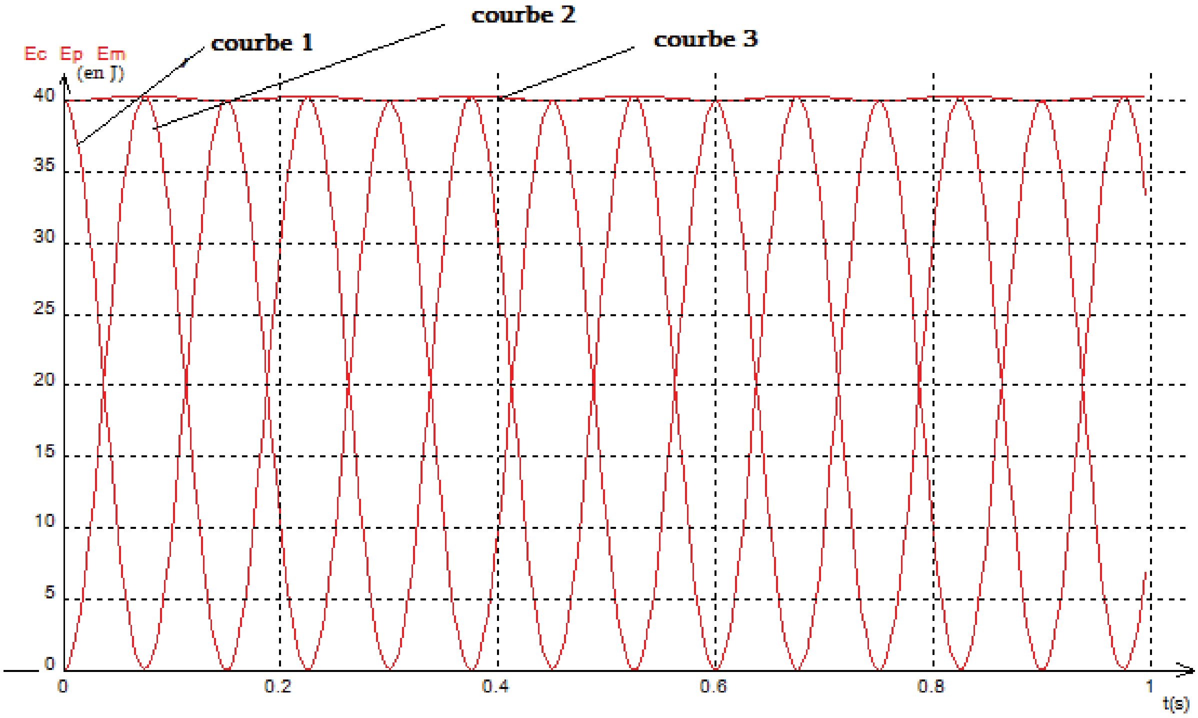
Question 23 :

Déterminer la constante de raideur k du ressort.

A	B	C	D
$5{,}0.10^{-2}$ N.m^{-1}	2,5 N.m^{-1}	$2{,}0.10^{4}$ N.m^{-1}	20 N.m^{-1}

Question 24 :

Sur ce graphique sont représentées les évolutions de l'énergie mécanique E_m , de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle élastique E_p.



Attribuer à chaque courbe du graphique suivant la grandeur correspondante.

A	B	C	D
Courbe 1: E_C Courbe 2: E_p Courbe 3: E_m	Courbe 1: E_p Courbe 2: E_c Courbe 3: E_m	Courbe 1: E_m Courbe 2: E_c Courbe 3: E_p	Courbe 1: E_m Courbe 2: E_p Courbe 3: E_c